



Prova d'accés a la Universitat (2011)

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1.

- a) Comprovau que si A és una matriu quadrada tal que $A^2 = 2A - I$ on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible. Quina és l'expressió de A^{-1} ? (6 punts)
- b) Utilitzau l'apartat a) per calcular la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ punts}).$$

2. Donats el punt $A = (1,3,0)$ i el pla $\pi: x + 2y + z - 1 = 0$, determineu les coordenades del punt A' simètric del punt A respecte del pla π (7 punts). Calculeu la distància de A' al pla π (3 punts).

3. Considereu la funció real definida en tota la recta real per

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

- a) Calculeu $f'(x)$ i $f''(x)$ i donau els resultats completament simplificats (7 punts).
- b) Determineu els màxims i mínims de la funció $f(x)$ (3 punts).

4. Donada la funció $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$,

- a) Calculeu $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ per a tot x (7 punts).
- b) Calculeu la integral $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx$ (3 punts).



Opció B

1. a) Sense desenvolupar el determinant, comprovau que:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0 \text{ (6 punts).}$$

- b) Determinau el rang del conjunt de vectors $\{(1, -2, 0, -3), (-1, 3, 1, 4), (2, 1, 5, -1)\}$ (4 punts).
2. Determinau l'equació del pla π que passant pels punts $A = (1, 0, 0)$ i $B = (0, 2, 0)$ talla l'eix OZ en el punt $C = (0, 0, c)$ amb $c > 0$ tal que l'àrea del triangle ABC val $\sqrt{6}$ (10 punts).
3. Considerau l'equació $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$ on λ és una constant més gran que 2. Fent servir el teorema de Bolzano i el de Rolle, provau que l'equació admet una única solució no negativa i més petita que 1.
4. Sigui $I = \int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}} dx$
- a) Expressau I aplicant el canvi de variable $x = t^2$ (4 punts).
- b) Calculau el valor de I (6 punts).